Problem 56. Solve linear programming problems using simplex method. Rozwiąż zadania programowania liniowego metodą sympleks.

Solution. a)

$$\mathcal{B} = \{3, 4, 5\},$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

$$s = 2,$$

$$\mathcal{F} = \{3, 2\}, \quad \min \mathcal{F} = 2,$$

$$r = 3,$$

$$\mathcal{B} = \{2, 3, 4\},$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right],$$

$$s = 1,$$

$$\mathcal{F} = \{1, 2\},$$

$$r = 2,$$

$$\mathcal{B} = \{1, 2, 4\},$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Optimal solutions is $\overline{x}_{\mathcal{B}} = (1, 2, 0, 1, 0)$ with optimal value $f_{min} = -5$. Optymalne rozwiązanie bazowe to $\overline{x}_{\mathcal{B}} = (1, 2, 0, 1, 0)$, na którym funkcja celu przyjmuje najmniejszą wartość równą $f_{min} = -5$.

```
c = [-1 -2 0 0 0]';
A = [1 1 1 0 0; 1 0 0 1 0; 0 1 0 0 1];
b = [3 2 2]';
[xmin, fmin, status, extra] = glpk (c, A, b);
```

b)

$$\mathcal{B} = \{3,4,5\},$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

$$s = 1,$$

$$\mathcal{F} = \{3,2\}, \quad \min \mathcal{F} = 2,$$

$$r = 2,$$

$$\mathcal{B} = \{1,3,5\},$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

$$s = 2,$$

$$\mathcal{F} = \{1,2\}, \quad \min \mathcal{F} = 1,$$

$$r = 2,$$

$$\mathcal{B} = \{1,2,5\},$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Optimal solution is $\overline{x}_{\mathcal{B}} = (2,1,0,0,1)$ with optimal value $f_{min} = -5$. Optymalne rozwiązanie bazowe to $\overline{x}_{\mathcal{B}} = (2,1,0,0,1)$, na którym funkcja celu przyjmuje najmniejszą wartość równą $f_{min} = -5$.

```
c = [-2 -1 0 0 0]';
A = [1 1 1 0 0; 1 0 0 1 0; 0 1 0 0 1];
b = [3 2 2]';
[xmin, fmin, status, extra] = glpk (c, A, b);
```

c)

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

$$\mathcal{B} = \{1, 2, 5\},$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ \hline 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Optimal solution is $\overline{x}_{\mathcal{B}} = (0, 4, 0, 0, 4)$ with optimal value $f_{min} = 8$. Optymalne rozwiązanie bazowe to $\overline{x}_{\mathcal{B}} = (0, 4, 0, 0, 4)$, na którym funkcja celu przyjmuje najmniejszą wartość równą $f_{min} = 8$.

```
c = [-3 2 0 0 0]';
A = [1 1 -1 0 0; -3 2 0 -1 0; 1 -1 0 0 1];
b = [4 8 0]';
[xmin, fmin, status, extra] = glpk (c, A, b);
```

It is not so easy to guess initial basic feasible set. The initial basic set can be found by solving an auxiliary linear programming problem. Nie jest oczywiste, jaki jest początkowy zbiór bazowy dopuszczalny. Można go znaleźć rozwiązując pomocniczy problem programowania liniowego.

$$\left[\begin{array}{rrrrrrrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathcal{B} = \{6, 7, 8\}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrrrrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -12 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

$$s = 2,$$

$$\mathcal{F} = \{4, 4\}, \quad \min \mathcal{F} = 2$$
$$r = 2,$$
$$\mathcal{B} = \{2, 6, 8\},$$
$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ \hline -\frac{3}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ \frac{5}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 4 \end{array}\right],$$
$$s = 1,$$
$$\mathcal{F} = \{0\}, \quad \min \mathcal{F} = 0,$$
$$r = 2,$$
$$\mathcal{B} = \{1, 2, 8\},$$
$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -1 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & -4 \\ \hline 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 4 \end{array}\right],$$
$$s = 5,$$
$$\mathcal{F} = \{4\}, \quad \min \mathcal{F} = 4,$$
$$r = 3,$$
$$\mathcal{B} = \{1, 2, 5\},$$
$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Basic feasible set for the original problem is $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$. Zbiór bazowy dopuszczalny oryginalnego problemu to np. $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$.

Much easier solution is to sketch the feasible set in $\mathbb{R}^2$ – it has a unique vertex $(0, 4)$ (when first and second inequalities are valid, this happens exactly when $x_3 = x_4 = 0$). Moreover, optimal solution is not unique, any point $(0, 4) + t(2, 3), t \geq 0$ is optimal. Znacznie łatwiej jest naszkicować (oryginalny) zbiór dopuszczalny w $\mathbb{R}^2$, posiada on dokładnie jeden wierzchołek $(0, 4)$ (po zmianie pierwszej i drugiej nierówności na równania). Odpowiada to warunkowi $x_3 = x_4 = 0$. Dodatkowo, optymalne rozwiązanie nie jest jednoznaczne, dowolny punkt $(0, 4) + t(2, 3), t \geq 0$ jest optymalny.

d)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & -8 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 12 \end{array}\right],$$

$$\mathcal{B} = \{1, 3, 4\},$$

$$s = 2,$$

$$\mathcal{F} = \{5/2, 1\}, \quad \min \mathcal{F} = 1,$$

$$r = 2,$$

$$\mathcal{B} = \{1, 2, 4\},$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \frac{8}{3} & 0 & -\frac{11}{3} & 8 \\ \hline 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{14}{3} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 12 \end{array}\right],$$

$$s = 5,$$

$$\mathcal{F} = \{9/14, 2\}, \quad \min \mathcal{F} = 9/14,$$

$$r = 1,$$

$$\mathcal{B} = \{2, 4, 5\},$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \frac{11}{14} & 0 & \frac{15}{7} & 0 & 0 & \frac{145}{14} \\ \hline \frac{1}{14} & 1 & \frac{2}{7} & 0 & 0 & \frac{17}{14} \\ -\frac{9}{7} & 0 & \frac{6}{7} & 1 & 0 & \frac{57}{7} \\ \frac{3}{14} & 0 & -\frac{1}{7} & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{array}\right].$$

Optimal solution is $\overline{x}_{\mathcal{B}} = (0, 17/14, 0, 57/7, 9/14)$ with optimal value $f_{min} = -145/14$. Optymalne rozwiązanie bazowe to $\overline{x}_{\mathcal{B}} = (0, 17/14, 0, 57/7, 9/14)$, na którym funkcja celu przyjmuje najmniejszą wartość równą $f_{min} = -145/14$.

```
c = [0 -8 0 0 -1];
A = [2 4 0 0 8; 0 3 1 0 -1; 0 0 0 1 6];
b=[10 3 12]';
[xmin, fmin, status, extra] = glpk (c, A, b);
```

e)

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 3 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -3 & 3 \\ -4 & -2 & -\frac{2}{3} & 2 & 0 & 7 \end{array}\right],$$

$$\mathcal{B} = \{4, 5\},$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} \frac{17}{3} & -\frac{17}{6} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ \hline -2 & -1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{9} & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{array}\right],$$

$$s = 2,$$

$$\mathcal{F} = \emptyset.$$

Unbounded problem with no optimal solution. Funkcja celu nie przyjmuje minimum na zbiorze dopuszczalnym – brak rozwiązania.

```
A = [3 -1/2 0 1 -3;  -4 -2 -2/3 2 0];
b = [3 7]';
[xmin, fmin, status, extra] = glpk (c, A, b);
```

f)

$$\mathcal{B} = \{4, 5, 6\},$$

$$s = 1,$$

$$\mathcal{F} = \{9, 13, 13\}, \quad \min \mathcal{F} = 9,$$

$$r = 1,$$

$$\mathcal{B} = \{1, 5, 6\},$$

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 36 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 9 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 4 \end{array}\right],$$

$$s = 2$$

$$\mathcal{F} = \{18, 8\}, \quad \min \mathcal{F} = 8,$$

$$r = 2,$$
$$\mathcal{B} = \{1, 2, 6\},$$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 44 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right],$$

Optimal solution is $\overline{x}_{\mathcal{B}} = (5, 8, 0, 0, 0, 8)$ with optimal value $f_{min} = -44$. Optymalne rozwiązanie bazowe to $\overline{x}_{\mathcal{B}} = (5, 8, 0, 0, 0, 8)$, na którym funkcja celu przyjmuje najmniejszą wartość równą $f_{min} = -44$.

```
A = [2 1 -2 1 0 0; 1 1 -1 0 1 0; 1 0 -2 0 0 1];
b = [18 13 13]';
[xmin, fmin, status, extra] = glpk (c, A, b);
```